Гаусстық және шартты-гаусстық модельдер..

§ 1C. Жергілікті мартингалдар, мартингальды қайта құру,жалпыланған мартингалдар

1. Жоғарыда келтірілген талдауда дубтың ыдырауына (5) және оны жалпылауға негізделген, негізгі рөлді екі ұғым ойнайды - "мартингалдық " және" болжамдылық " - және тиісінше,қажетті ұғымдары ықтималдық ұғымдары мартингал және болжамды тізбегі.

Сондықтан одан әрі жүргізілген Стохастикалық талдау көбінесе "мартингаль" немесе "стохастикалық есептеу" деп аталады.Бұл сүзгіленген ықтималдық кеңістіктеріне талдау, арнайы (әдеттегі) ықтималдық кеңістіктеріне құрылымы - σ-алгебра ағыны (. Дәл осы құрылымның болуымен ––

"сүзу" (. - тоқтау сәті, мартингал, болжамдылық, суб-және супермартингалдар, семимартингалдар және т.

Қазіргі стохастикалық есептеулерде маңызды рөл болуы мүмкін мартингал ұғымы емес, жергілікті мартингал ұғымы. Жергілікті мартингалдар класы болса да, бұл керемет жағдай мартингал класына қарағанда кеңірек, ол соңғысының көптеген маңызды қасиеттерін сақтайды.

**Анықтама 1.** Стохастикалық негізде берілген кездейсоқ шамалар тізбегі стохастикалық реттілік деп аталады, егер әрбір -де шамалары -өлшенетін болса.

Бұл өлшеу қасиетін атап өту үшін стохастикалық тізбектер түрінде жазылады, оның ішінде белгілеу сонымен қатар шамалары өлшенетін σ-алгебрасы болып табылады.

**Анықтама 2.** Стохастикалық дәйектілік

  *мартингал,*

 *супермартингал,*

 *субмартингал*

егер болса, < ∞ әрбір және (P-п. н.) Барлық үшін шарт орындалады.

Тиісінше алдынғы формуалаларыға тең.

Мартингал үшін математикалық үміттері тұрақты = супермартингал үшін олар өспейді , субмартингал үшін олар азаймайды .

Мартингалдың классикалық мысалы-" Леви мартингал" , мұндағы - -өлшенетін кездейсоқ шама, | < ∞.

Бұл мартингал біркелкі интегралданады, яғни кездейсоқ шамалар тобы біркелкі интегралданады:

 ∞

Болашақта арқылы біз барлық біркелкі біріктірілген мартингалдардың класын белгілейміз (UI-Uniformly Integrable-ден). Барлық мартингалдар класы белгіленеді.

Қарастырылып отырған мартингалдар тек үшін анықталған жағдайда, мартингал және біркелкі интеграцияланатын мартингал ұғымдары,әрине, сәйкес келеді =.

Кейде және үшін және белгілері де қолданылады, егер "мартингальдылық"қасиеті қандай және қандай ағымға ) қатысты қарастырылатындығын атап өту қажет болса.

**Анықтама 3**. Стохастикалық тізбекті мартингал-айырмашылық деп атаймыз, егер ( .

Мұндай реттілік үшін тиісті "сум Марна" тізбегі , мартингал құрайтыны анық. Және керісінше, әрбір мартингалмен мартингал-айырма , мұндағы үшін және үшін n=0.

**Анықтама 4.** Стохастикалық тізбегі жергілікті мартингал (субмартингал, супермартингал) деп атаймыз, егер мұндай (локализацияреттілік болса маркалық моменттер (яғни

) сонымен қатар, § 1f-Тегі 1 анықтамасын қараңыз), бұл және әр "тоқтатылған" реттілік

 ,

(субмартингал, супермартингал) болып табылады.

***Ескерту 1***. Жергілікті мартингалдың анықтамасына көбінесе тізбегі әр де тек мартингал ғана емес, сонымен қатар біркелкі интегралданатын мартингал да кіреді (мысалы, шаралар, [250]).

Сондай-ақ, кейде тізбегін қарастырғысы келетінін ескеріңіз, олар үшін "бастапқы" кездейсоқ мән белгіленбейді, тоқтатылған тізбегі басқаша анықталады:

 I>0),

**1**. Қажетті ықтималдық ұғымдары

Жергілікті мартингалдар класы үшін немесе (P, ()).4 анықтамасынан әрбір мартингал жергілікті мар болып табылады- .Егер және кездейсоқ шамалар тобы болса

-тоқтаудың соңғы сәті біркелкі интегралданатын (яғни, ,Cкезінде), онда (X)

Х-мартингал (X), сонымен қатар Левидің мартингалы: мұндай интегралданатын F-өлшенетін кездейсоқ шама Х, Бұл Х =E(X |Fh). Осылайша, бұл жағдайда X.

**Анықтама 5**. Стохастикалық тізбекті x =деп атаймызXжалпыланған мартингалмен (субмартингалмен, супермартингпен) егер E||< , әрбір P > 1 үшін жалпыланған шартты белгілер анықталған математикалық күту E (X, | F-1) және шарт орындалды E()=

 (сәйкесінше E() , E()шарттары орындалды).

**Ескерту 2.** Жалпыланған математика анықтамасынан қараңыз E (X |Fn-1) және "мартингальды" теңдік E()=күту-томатикалық түрде E() Басқаша айтқанда, шартты

математикалық күту E (X |Fn-1) анықталған ғана емес, сонымен қатар, әрине.

Осылайша, 5 анықтамасында E(|X,||Fn-1) <деп бірден болжауға болады (Р-п.ғ. к.), п>0.

**Анықтама 6**. Стохастикалық тізбекті E() деп атаймыз E (X |Fn-1) жалпыланған мартингал-айырма (субмартингал-айырма,

супермартингал-айырмашылық), егер әрбір п > 1 үшін жалпыланған-шартты математикалық күтулер E (х, / F1) және шарттар орындалды E (X |Fn-1) (сәйкесінше шарттар E (X |Fn-1)

**Ескерту 3**. Алдыңғы ескертулердегідей, анықтамада жалпыланған- E() мартингал-айырмашылықты шартты орындау үшін талап етуге болады

**Анықтама 7**. М = (М,, F) болсын-стохастикалық Ізбасар-

және Y = (Yn, F-1)- болжамды реттілік (Y,-1-өлшенетін, P >1 және өлшенетін).

**Стохастикалық дәйектілік**

**YM**онда

y көмегімен М түрлендіру деп аталады, егер одан да көп болса кек мартингал, онда Х= Y-М мартингалды түрлендіру деп аталады (мартингала М(болжамды) y тізбегі арқылы).

Келесі теорема дискретті уақыт жағдайында-4, 5 және 7 анықтамаларымен енгізілген литалар бір-бірімен байланысты.

**Теорема**. болсын E||< -стохастикалық реттілік,

E| Xol <0. Келесі шарттар балама болып табылады:

(А) Х-жергілікті мартингал (белгіленуі: X);

(b) X - жалпыланған мартингал (белгілеу: X)

(c) X-мартингалды түрлендіру (белгілеу: X),

 яғни X= Y•М белгілі бір болжамды реттілікпен Y=() және кейбір мартингал

Дәлелдеме.

 (1)

мұндағы Y - болжамды дәйектілік және М-мартингал. Егер / Y / С,k> 1, Содан кейін x, әрине, мартингал.

-- өлшемді интегралданатын кездейсоқ шама, Демек, мартингал болып табылады (), және (1) шарт үшін орындалады. Мұндағы :

Осылайша,

 **2.** Локалдық мартингал, мартингалдық түрлендіру және жалпылама мартингал ұғымдары стохастикалық есептеулерде маңызды рөл атқарады. Оны төмендегідей көрсетуге болады :

 локалдік субмартингал болып табылсын. Ол локализациялаушы реттілікпен болсын.Мұндағы . Онда әрбір мәнінде үшін мынадай болып жіктеледі:

*-*болжалымды реттілік және -мартингалдар.

 Бұл жіктеудің жалғыздығына (*-*болжалымды реттілігімен) байланысты

тең екенін көруге болады.

 үшін деп пайымдасақ, біз локалдік мартингал екенін көреміз, себебі «тоқтатылған» реттіліктері мартингал болып табылады.

 Сонымен, егер локалдік субмартингал болатын болса, онда :

 (2)

мұндағы болжалынатын тізбек, , ал локалдық мартингал болып табылады.

 тізбегі бұл жағдайда өспелі (яғни кемімейтін тізбек) екенін айта кеткеніміз жөн. Ол үшін айқын формуладан шығады :

және субмартингалдықтың қасиеттері.

 болжалынатын процесспен (2) түрдегі жіктеу жалғыз болатынын айта кеткен жөн.

 ***Анықтама 8:***

Егер стохастикалық тізбегі (мұндағы және локалдық мартингал түрінде бейнелеуге жол берсе, онда біз тің *жалпылама Еменнің* *жіктелуіне* жол береді деп айтамыз.Ал тізбегі тізбегіндегі компенсатор болып табылады.

Осылайша, 1-тармақтан X = (Xn) n≤N – мартингал екені шығады. ісі де осылай қарастырылады. Лемма дәлелденді.

4. Үздіксіз уақыт жағдайында дәлелденген лемманы сәйкес нәтижемен салыстыру қызықты.

Фату леммасы мен Лебег теоремасының үстем конвергенцияға қолданылуына негізделген лемманы дәлелдеудегідей дәлелдеулер, келесі бекітулердің дұрыстығын дәлелдеуге мүмкіндік береді.

 Esup ,

шартын қанағаттандыратын кез келген жергілікті мартингал X = ( - супермартингал.

II. Кез келген жергілікті мартингал шартын қанағаттандыратын

Esup | | <∞,

мартингал болып табылады.

III. Шартты қанағаттандыратын кез келген жергілікті мартингал

Esup | | <∞,

біркелкі интегралданатын мартингал болып табылады.

Бастап дискретті уақыт жағдайында екенін атап өту пайдалы , фактісінен Emax шығады. Үздіксіз жағдайда болғандықтан, жалпы айтқанда, Esup сәйкес келмейді. Бұл жағдай, шын мәнінде, басты себеп болып табылады жоғарыдағы лемма нәтижесі автоматты түрде берілмейді дискретті уақыт жағдайы.

Сондай-ақ I мәлімдемеде жергілікті мартингал шын мәнінде «нағыз» супермартингал болып шығуы мүмкін екенін, яғни ол мартингал болмауы мүмкін екенін ескереміз.

Лундберг-Крамер моделінде тұжырымдалған болжамдар табиғи түрде әлсіреуі мүмкін, ал модельдің өзі күрделі болуы мүмкін. Тәуекел процесі деп мына формуланы есептесек болады:

Мұндағы - броундық қозғалыс, ал

Қорытындылай келе, төлемдердің F = F (x) таралу сипаты туралы мәселеге қысқаша тоқталайық. Алайда, шартты оқиғалар, төлемдерге байланысты үш түрдің біріне жүгінеді:

• қалыпты,

• экстремалды,

• апатты.

Қалыпты оқиғаларды сипаттау үшін тез төмендейтін «құйрықтар» қолданылады:

*(мысалы экспоненциалдық шарттармен )*

«Төтенше» оқиғаларды сипаттау үшін таратулар қолданылатын F - F (x) "ауыр құйрықтар" әдісі бар, мысалы,

 (Парето түріндегі үлестірім) немесе :

 кезіндегі (Weibull таралуы)

Лундберг-Крамер теоремасы қалыпты күйде ғана кездеседі, яғни үлкен төлемдер жағдайында қолданылмайды.

демек тізбегінің ықтималдық қасиеттерін неғұрлым нақты зерттеу µn және σ шамалары құрылымының конкретизациясына байланысты екені анық. Бұл дәл келесі келтірілген модельдерде жасалады. реттелігінің таралуы тұрғысынан және шартты Гауссизмге ұмтылу тұрғысынан бұл қасиетті келесі контекстте қарастырған жөн екенін ескереміз. -сулфильтрация болсын , яғни , мысалға . Мысалы,

 делік. Бұл жағдайда таралуы да Гаусс ұоспасы болып табылады. Енді кейбір нақты (сызықты және сызықты емес) Гаусс және шартты Гаусс модельдеріне тоқталайық, олар үшін мәндері , ал бастапқы шарттар үшін көрсетілуі керек.

**2. ретті авторегрессивті моделі.**

 Бұл модель ұсынады

Және

Осылайша мұнда

 *ретінің* авторегрессия соделі деп аталатын тізбегі үшін оның бастапқы мәндерін анықтау қажет. Егер бұл мәндер тұрақтылық болса, онда тізбегі тек шартты тұрде гаусс емес, сонымен қатар (жай) гаусс болады. § 2b бірінші ретті авторегрессия моделінің қасиеттерін толығырақ қарастырады

**3. Жылжымалы орташа моделі**.

 Бұл модель аббревиатурасы Moving Average (жылжымалы орташа) дегенді білдіреді бастапқы мәндерде орнатады және

Демек

**4. Авторегрессивті және қозғалмалы орташа моделі.**

деп қабылданады, бастапқы шарттар қойылады және бұл есептелінеді

Тәртіптің осы түрінің үлгісі (Авторегрессивті жылжымалы орташа) деп белгіленеді. Авторегрессивті және жылжымалы орташа тәртіптің аралас моделі деп аталады. Ол жүзеге асады егер

Бұл барлық үш сызықты Гаусс модельдері (егер «бастапқы» шарттары тұрақты болса). Біз енді бірнеше қызықты шартты сызықты емес.Гаусс модельдерін жүргіземіз.

**5. Шартты гетерогенділіктің авторегрессивті моделі .**

Тағы да біз тізбегі кездейсоқтықтың (жалғыз) көзі болып табылады деп есептейміз,

Және

бұл жерде – берілген бастапқы тұрақтылар. Басқаша айтқанда – шартты дисперсиясы, – мәндерінің функциясы. Бқл модельді 1982 жылы Р.Энглем шартты гетерогендіоіктің агрессиыті моделі деген атаумен таныстырды. Қаржылық уақыт қатарларының бірқатар тривиальды емес қасиеттерін түсіндіруде өте сәтті болды, мысалы мәндерін кластерлеу (толыптау) әсері.

Сонымен

Мұндағы – қалыпты таралған тәуелсіз кездейсоқ шамалардың тізбегі, , ал (13) формуламен анықталады. Егер теңдіктің орнына (12) формуланы қоятын болсақ бізде

Ал (13) шартына бағынады, онда (4) теңдеу түрінде болады

Бұл модельдер кейде деп аталады.

 осы формуламен қоямыз

 (17)

Содан кейін (13) формулаға байланысты бізде

 (18)

Онда

яғни бірізділік мартингал-айырым түзеді.

Осылайша, ARCH (p)-моделін авторегрес ретінде қарастыруға болады-

жүйелілікке арналған AR(p) бірізділік үшін "Шуылмен" мартингал-айырмашылық болып табылады.

**6. Шартты гетерогенділіктің жалпыланған авторегрессиялық моделі GARCH(p, q).**

Arch(p) моделін қолданудың сәттілігі бұл әртүрлі жалпылаудың, нақтылаудың, модификацияның және т. б. пайда болуына әкелді.

Берілген GARCH моделі (p, q) ) (Generalized ARCH - жалпыланған авто-шартты гетерогенділіктің регрессиялық моделі) 1986 ж. Т. Боллерслев енгізген (T. Bollerslev, [48]) бұл осындай сорттардың бірі болып табылады

Бұрынғыдай санасақ

теңдіктің орнына (13) формула бар деп болжаймыз

 ( 19 )

және " бастапқы " шарттар ) , қарапайымдылық үшін оны тұрақты деп санауға болады.

GARCH моделі (p, q) - бұл жүйелілік ,

 , (20)

онда тәуелсіз бірдей үлестірілген кездейсоқ шамалар тізбегі (19) формулаға бағынады .

Біз белгілейміз

 (21)

Онда - ығысу операторы және

 (22)

Осы белгілерде

 (L)

Егер жоғарыда айтылғандай, қойылса , онда біз аламыз

 .

Басқаша айтқанда

 (23)

Осылайша, GARCH (p, q)-модельді авторогрессивті орта модель ретінде қарастыруға болады, ARMA(max (p, q), q), бірізділік үшін « шуылмен » бұл мартингал айырмашылығы.

Атап айтқанда, ARCH моделі үшін (1) көмегімен

 ,

болжау арқылы табамыз

 ,

Мұнда « шуылмен» мартингал айырмашылығын құрайды

ARCH және GARCH модельдерінің әр түрлі жалпылануы (мысалы, EGARCH,AGARCH, STARCH, NARCH, NARCH, HARCH, ‌) бір -бірімен байланысты шамалардың белгілі бір сипаттамасымен функциялар ретінде, σ-алгебраларға қатысты өлшенетін

**7. Стохастикалық құбылмалылық моделі**. Барлық алдыңғы модельдерде мүмкіндіктің бір ғана көзі болды. Оған Гаусс тізбегі берілді тәуелсіз шамалар. Стохастикалық құбылмалылық модельдері кездейсоқтықтың екі көзін қамтиды: және қайсысы

қарапайым жағдайда тәуелсіз және стандартты Гаусс деп есептеледі

яғни сол тізбектер тәуелсізден тұрадыт таратылған кездейсоқ шамалар.

Болсын Қоямыз

 , (24)

Онда боолып табылады

Сонда бұл анық

 , (25)

Яғни шартты бөлу параметрлері бар Гаус 0 және

Қоямыз

 (26)